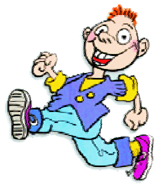
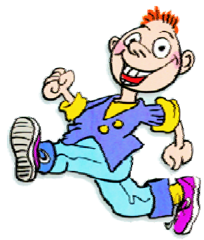
Учебен център Регалия



Учебен център • Издателство • Всичко за матурите • Е-обучение • За нас

Учебен център "Регалия" организира:



- целогодишни курсове за подготовка за зрелостни и кандидатстудентски изпити;
- целогодишни курсове за кандидатстване в езикови и профилирани гимназии по български език и математика;
- пробни изпити за кандидатстване след 7. клас;
- курсове за текуща подготовка по български език и математика за 6. клас.

На интернет страницата на Учебния център
http://www.regalia6.com
може да намерите:

тестове за външно оценяване за 4. клас

тестове за външно оценяване за 5. клас

тестове за външно оценяване за 6. клас

тестове за външно оценяване и кандидатстване след 7. клас

конкурсни изпити за кандидатстване след 7. клас

задачи от национални състезания за 7. клас

примерни тестове за ЕПИ на УНСС

тестове за зрелостни изпити

връзки към средни училища в София

връзки към висши училища в България

и още много полезна информация.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. (В) Даденото неравенство няма смисъл, в случай че някой от знаменателите на двата дробни израза е равен на нула. Тъй като $x^2-4=(x+2)(x-2)$, то $x^2-4=0$ за $x=-2$ и за $x=2$. Понеже $x^2+3>0$ за всяко x, имаме $x(x^2+3)=0$ само за $x=0$. Така даденото неравенство няма смисъл за $x=-2$, $x=2$ и $x=0$. Следователно допустими са тези стойности на x, за които $x\neq-2$, $x\neq2$ и $x\neq0$. Записано с интервали, множеството от всички допустими стойности на неизвестното x е $(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$.

2. (Г) Полагаме $A=\dfrac{4}{1-a}\sqrt{\dfrac{a^2}{8}-\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{8}}$. Тогава

$$A=\frac{4}{1-a}\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{8}}=\frac{4}{1-a}\sqrt{\frac{(a-1)^2}{(2\sqrt{2})^2}}=\frac{4}{1-a}\,\frac{|a-1|}{2\sqrt{2}}.$$

При $a>1$ имаме $a-1>0$ и $|a-1|=a-1$. Получаваме $A=\dfrac{4}{1-a}\cdot\dfrac{a-1}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$.

3. (Г) Преобразуваме $7^{3\log_7 4-\log_{\sqrt{7}}2}=7^{3\log_7 2^2-\log_{7^{1/2}}2}=7^{3\cdot2\log_7 2-2\log_7 2}=7^{(6-2)\log_7 2}=(7^{\log_7 2})^4=2^4=16$.

4. (Д) Прилагаме формулата $V=K\,\dfrac{q^n(q-1)}{q^n-1}$ за изплащане на кредит от K лв. за n периода с равни вноски от V лв. за всеки един период и $p\,\%$ лихва за един период, като $q=1+\dfrac{p}{100}$. В нашия случай $K=3310$, $n=3$, $p=10$, $q=1+\dfrac{10}{100}=1,1$. За месечната вноска намираме $V=3310\cdot\dfrac{1,1^3\cdot(1,1-1)}{1,1^3-1}=3310\cdot\dfrac{1,331\cdot0,1}{1,331-1}=3310\cdot\dfrac{0,1331}{0,331}=3310\cdot\dfrac{1331}{3310}=1331$ лв.

5. (А) $3(a-1)x+\dfrac{1}{2}<2x+3 \iff (3a-5)x<\dfrac{5}{2}$. При $3a-5=0$, т.е. за $a=\dfrac{5}{3}$, последното неравенство приема вида $0x<\dfrac{5}{2}$ и е вярно за всяко x. При $3a-5>0$ даденото неравенство ще има решения $x<\dfrac{5}{2(3a-5)}$, а при $3a-5<0$ решенията са $x>\dfrac{5}{2(3a-5)}$.

6. (Б) Ъглополовящата на втори и четвърти квадрант има уравнение $y=-x$. Пресечните точки на тази права с графиката на функцията $y=-x^2+2x+4$ ще имат координати $(x;y)$, удовлетворяващи системата $\left|\begin{array}{l} y=-x\\ y=-x^2+2x+4\end{array}\right.$. Приравняваме десните страни на двете уравнения и получаваме квадратното уравнение $-x=-x^2+2x+4 \iff x^2-3x-4=0$ с корени $x_1=4$ и $x_2=-1$. Това са абсцисите на пресечните точки. Търсените ординати са съответно $y_1=-x_1=-4$ и $y_2=-x_2=1$.

7. (Д) С непосредствена проверка установяваме, че $x=\dfrac{1}{2}$ и $x=2$ са решения на даденото уравнение. Така елиминираме отговори Б) и Г). Проверяваме със стойност на x, върху числовата ос наляво от $\dfrac{1}{2}$, например с $x=0$: $2|0-2|+|1-2\cdot0|=5\neq3$. Тогава

А) също не е верният отговор. Сега избираме стойност на x надясно от точката 2, например $x = 3$. Но $x = 3$ не удовлетворява уравнението и В) не е верният отговор. Ако не успеем да съобразим горния начин на разсъждения, следваме стандартния.

8. **(Б)** Допустимите стойности на неизвестното x определяме от $-x^2 + x + 6 \geq 0 \iff (x+2)(x-3) \leq 0$. Получаваме $x \in [-2; 3]$. Следователно за $x \in (-2; 3)$ имаме $\sqrt{6 + x - x^2} > 0$. За да бъде вярно $(x+1)\sqrt{6 + x - x^2} < 0$, трябва да е изпълнено $x < -1$. Решението на неравенството е $(-2; 3) \cap (-\infty; -1) = (-2; -1)$.

9. **(В)** Допустими стойности за x са тези, за които $4 - 3^x > 0$. Преобразуваме уравнението: $x + \log_6(4 - 3^x) = x\log_6 2 + \log_6 3 \iff \log_6 6^x + \log_6(4 - 3^x) = \log_6 2^x + \log_6 3 \iff \log_6(6^x(4 - 3^x)) = \log_6(3 \cdot 2^x) \iff 6^x(4 - 3^x) = 3 \cdot 2^x \iff 3^x(4 - 3^x) = 3$. Полагаме $t = 3^x$, $t > 0$ и получаваме $t(4 - t) = 3 \iff t^2 - 4t + 3 = 0$. Корените на последното уравнение са $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$. За решенията x_1 и x_2 на даденото уравнение имаме $3^{x_1} = 1$ и $3^{x_2} = 3$. Тогава $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Търсеният сбор е $x_1 + x_2 = 1$. И двете намерени стойности за x са допустими.

10. **(Д)** Функцията $f(x)$ е дефинирана когато $x^2 - 5x + 9 > 0$ и $1 - \log_3(x^2 - 5x + 9) \geq 0$. Дискриминантата на първото неравенство е $D = (-5)^2 - 4 \cdot 9 < 0$, коефициентът пред x^2 е $1 > 0$, следователно неравенството е изпълнено за всяко x. За второто неравенство имаме: $1 - \log_3(x^2 - 5x + 9) \geq 0 \iff \log_3(x^2 - 5x + 9) \leq 1 \iff \log_3(x^2 - 5x + 9) \leq \log_3 3 \iff x^2 - 5x + 9 \leq 3 \iff x^2 - 5x + 6 \leq 0 \iff (x-2)(x-3) \leq 0$. Решенията му са $[2; 3]$ и това е дефиниционното множество на $f(x)$.

11. **(Г)** Пресмятаме първите няколко члена на редицата: $a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 7 < 50$, $a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 15 < 50$, $a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 7 = 31 < 50$, $a_6 = 3a_5 - 2a_4 = 3 \cdot 31 - 2 \cdot 15 = 63 > 50$.

12. **(В)** От условията $y(a) = b + 1$, $y(b) = a - 1$ за функцията $y = ax + b$ получаваме системата $\left| \begin{array}{l} a^2 + b = b + 1, \\ ab + b = a - 1 \end{array} \right.$. Първото уравнение дава $a^2 = 1 \iff a = \pm 1$. Последователно заместваме във второто уравнение. При $a = 1$ намираме $b = 0$, т.е. $y = x$. При $a = -1$ второто уравнение има вида $0x = -2$ и следователно системата няма решение в този случай. Търсената функция е $y = x$.

13. **(Г)** Разглеждаме два случая: при $a = 0$ уравнението е линейно: $3x + 3 = 0$ и има единствено решение. При $a \neq 0$ уравнението е квадратно. То има точно един корен тогава и само тогава, когато дискриминантата му е нула: $(a+3)^2 - 12a = 0 \iff a^2 - 6a + 9 = 0 \iff (a-3)^2 = 0$; т.е. за $a = 3$.

14. **(Б)** Събираме почленно двете уравнения на системата $\left| \begin{array}{l} x - y = 5, \\ |2x - 1| + y = 1 \end{array} \right.$ и получаваме $x + |2x - 1| = 6$. Всяко решение на последното модулно уравнение заедно с $y = x - 5$ ще даде решение на системата, т.е. колкото са решенията на уравнението $x + |2x - 1| = 6$, толкова са и решенията на системата.

При $2x - 1 < 0$, т.е. $x < \dfrac{1}{2}$, имаме $|2x - 1| = -(2x - 1)$ и $x - 2x + 1 = 6$, откъдето $x = -5 < \dfrac{1}{2}$. При $2x - 1 \geq 0$, т.е. $x \geq \dfrac{1}{2}$, имаме $|2x - 1| = 2x - 1$ и $x + 2x - 1 = 6$, откъдето $x = \dfrac{7}{3} \geq \dfrac{1}{2}$. Уравнението $x + |2x - 1| = 6$ има две решения. Следователно системата също има две решения.

15. **(Г)** Понеже $0 < \alpha < \pi$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Тогава $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$ и от формулата за тангенс от сбор на два ъгъла намираме

$\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-(-\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\frac{(-3+1)\sqrt{3}}{3}}{1+1} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

16. **(Д)** От $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ следва $2\sin\dfrac{3x+x}{2}\cos\dfrac{3x-x}{2} = 0 \iff \sin 2x\cos x = 0$. От формулата за синус от двоен ъгъл: $2\sin x\cos^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ или $\cos x = 0$. Решенията на $\sin x = 0$ са $x = k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, а на $\cos x = 0$ са $x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

17. **(А)** Преобразуваме неравенството: $\sin x \le \cos 2x \iff \sin x \le 1-2\sin^2 x \iff 2\sin^2 x+\sin x-1 \le 0$. След полагане $t=\sin x$ получаваме $2t^2+t-1\le 0 \iff (2t-1)(t+1)\le 0$, с решение $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$. Така $\sin x\in\left[-1;\dfrac{1}{2}\right] \iff -1\le\sin x\le\dfrac{1}{2} \iff x\in\left[2k\pi;\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi;2(k+1)\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

18. **(Г)** Използваме, че $75^\circ = 45^\circ+30^\circ$. Тогава $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ\sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{4}$.

19. **(В)** Заместваме $n=1$ във формулите, дадени в А), Б), В), Г) и Д). Получаваме съответно $\dfrac{1}{0}, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{2}, \dfrac{1}{2}$. Така изключваме А), Б) и Г). При $n=2$ във В) и Д) се получава съответно $\dfrac{-2}{5}$ и $\dfrac{-1}{5}$. Следователно Д) не е верен отговор. Ако забележим, че знакът на всеки следващ член от редицата е противоположен на предишния, числителите по абсолютна стойност са $1,2,3,4,\ldots$, а знаменателите са 1^1+1, 2^2+1, 3^2+1, $4^2+1,\ldots$, можем да посочим веднага верния отговор В).

20. **(Б)** Тъй като $1-f(x) = -2x$, то $f(1-f(x)) = f(-2x) = -4x+1$. Следователно $f(1-f(x))\le 9 \iff -4x+1\le 9 \iff x\ge -2$.

21. **(В)** Имаме $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{2x^3-3\operatorname{tg}^2 x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x\sin x}{x^2}}{\frac{2x^3-3\operatorname{tg}^2 x}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}}{2x-3\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$. Сега използваме, че $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 0} = \dfrac{1}{1} = 1$, както и основната граница $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, за да пресметнем окончателно $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{2x^3-3\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{2\cdot0-3\cdot1\cdot1^2} = -\dfrac{1}{3}$.

22. **(Г)** За намирането на първата производна прилагаме правилото за диференциране на частно на две функции:

$$f'(x) = \frac{(\cos x)'(1+\sin x)-\cos x\cdot(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x\cdot(1+\sin x)-\cos x\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1-\sin x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}.$$

Също и за втората производна:
$f''(x) = \dfrac{(-1)'(1+\sin x) - (-1)(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2} = \dfrac{0(1+\sin x) - (-1)\cos x}{(1+\sin x)^2} = \dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$.

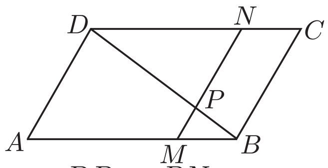
23. **(Д)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2+3}{5x^2-x+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2+\dfrac{3}{x^2}}{5-\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}} = \dfrac{-2+0}{5-0+0} = -\dfrac{2}{5}$.

24. **(Д)** Функцията $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$ е дефинирана навсякъде в $[-1;+\infty)$. Пресмятаме $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ и корените на уравнението $3x^2 - 12x + 9 = 0$ определят евентуалните точки на локален екстремум $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$ за функцията $f(x)$. От представянето $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ следва, че $f'(x) > 0$ за $x \in (-1;1)$, $f'(x) < 0$ за $x \in (1;3)$, $f'(x) > 0$ за $x \in (3;+\infty)$. Тогава $f(x)$ е растяща в интервала $(-1;1)$, намаляваща в $(1;3)$ и отново растяща в $(3;+\infty)$. Поради непрекъснатостта на функцията, тя приема най-малка стойност в $[-1;+\infty)$ за $x = -1$ или за точката на локален минимум $x = 3$. Пресмятаме $f(-1) = -21 < -5 = f(3)$.

25. **(Б)** Пресмятаме $y' = -2x+3$. Ъгловият коефициент $\operatorname{tg}\alpha$ на допирателната към графиката на $y(x)$ в точката с абсциса $x = 2$ е равен на $y'(2)$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = y'(2) = -2\cdot 2+3 = -1$. Тъй като $\alpha \in [0;\pi]$, то $\operatorname{tg}\alpha = -1$ единствено за $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$.

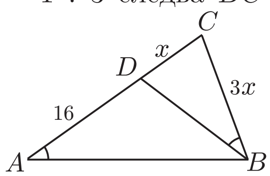
26. **(В)** Функцията $f(x) = \dfrac{x^2+a}{x^2+1}$ е дефинирана за всяко $x \in (0;+\infty)$. Пресмятаме $f'(x) = \dfrac{(x^2+a)'(x^2+1) - (x^2+1)'(x^2+a)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+a)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x(1-a)}{(x^2+1)^2}$.
Функцията $f(x)$ е строго намаляваща в $(0;+\infty)$, когато $\dfrac{2x(1-a)}{(x^2+1)^2} < 0$ е изпълнено за всяко $x \in (0;+\infty)$. Така $1 - a < 0$, т.е. $a > 1$.

27. **(Б)** Правите DB и DC се пресичат от успоредните прави PN и BC. Следователно $\dfrac{DP}{PB} = \dfrac{DN}{NC}$, т.е. пропорцията а) е вярна. Тъй като $AMND$ е успоредник, $AM = DN$ и от горната пропорция получаваме $\dfrac{DP}{PB} = \dfrac{AM}{NC}$, т.е. б) е вярна.

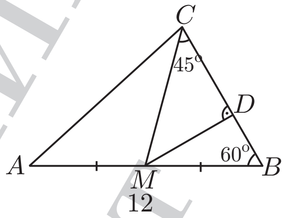


Правите BD и MN се пресичат от AB и CD. Следователно $\dfrac{DP}{PB} = \dfrac{PN}{PM}$. От пропорцията б) следва, че пропорцията в) $\dfrac{AM}{NC} = \dfrac{PN}{PM}$ също е вярна.

28. **(А)** Триъгълниците ABC и BDC имат по два равни ъгла: $\sphericalangle A = \sphericalangle CBD$ и $\sphericalangle C$ е общ. Тогава $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ и следователно $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{DC}$. Ако положим $CD = x$, то $AC = 16 + x$. Освен това, от отношението $CD : BC = 1 : 3$ следва $BC = 3x$. Заместваме в горната пропорция AC, BC и CD с равните им и получаваме $\dfrac{16+x}{3x} = \dfrac{3x}{x} \iff 16 + x = 9x \iff x = 2$. Оттук $BC = 3 \cdot 2 = 6$.



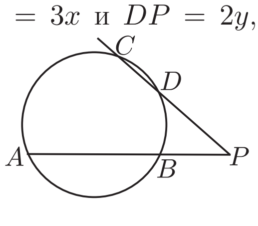
29. (В) Тъй като точката M е среда на страната AB, $BM = 6$. В правоъгълния триъгълник BMD, $\sphericalangle BMD = 30^\circ$. Тогава катетите са с дължини $BD = \dfrac{1}{2}BM = 3$ и $MD = \sqrt{BM^2 - BD^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$. Триъгълникът CDM е правоъгълен с остър ъгъл $DCM = 45^\circ$ и следователно равнобедрен, т.е. $CD = MD = 3\sqrt{3}$. Оттук $BC = BD + CD = 3 + 3\sqrt{3}$.



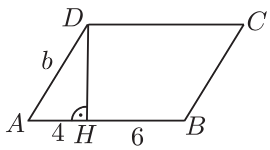
30. (Г) От формулата за медианата $m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ следва $5 = \dfrac{1}{2}\sqrt{2.9^2 + 2.7^2 - c^2}$. Оттук $100 = 98 + 162 - c^2$. $c^2 = 160$ и намираме $AB = c = 4\sqrt{10}$.

31. (Г) От синусовата теорема за $\triangle ABC$ имаме $\dfrac{BC}{\sin \sphericalangle A} = \dfrac{AC}{\sin \sphericalangle B} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sin\alpha} = \dfrac{4}{\sin(\alpha + 45^\circ)}$ $\Rightarrow \dfrac{\sin(\alpha + 45^\circ)}{\sin\alpha} = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$. Преобразуваме последователно $\dfrac{\sin\alpha\cos 45^\circ + \cos\alpha\sin 45^\circ}{\sin\alpha} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 1 + \operatorname{cotg}\alpha = 4$, откъдето $\operatorname{cotg}\alpha = 3$.

32. (Б) Да положим $AB = 5x$ и $CD = y$. Тогава следва $BP = 3x$ и $DP = 2y$, както и $AP = AB + BP = 8x$, $CP = CD + DP = 3y$. От свойството на секущите $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ получаваме $8x \cdot 3x = 3y \cdot 2y \iff 4x^2 = y^2 \iff y = 2x$. Тогава $AB : CD = (5x) : y = (5x) : (2x) = 5 : 2$.

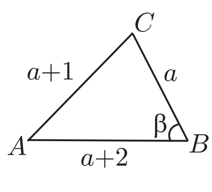


33. (Д) Ясно е, че $CD = 10$. Нека $AD = BC = b$. От $\triangle AHD$ по Питагоровата теорема намираме $DH = \sqrt{b^2 - 16}$. Тогава периметърът на $\triangle AHD$ е $b + 4 + \sqrt{b^2 - 16}$, периметърът на четириъгълника $HBCD$ е $6 + b + 10 + \sqrt{b^2 - 16}$ и по условие $2(b + 4 + \sqrt{b^2 - 16}) = 6 + b + 10 + \sqrt{b^2 - 16} \iff \sqrt{b^2 - 16} = 8 - b$. За $4 < b \le 8$ повдигаме на квадрат последното уравнение и получаваме $b^2 - 16 = b^2 - 16b + 64 \iff 16b = 80$, откъдето $AD = b = 5$.



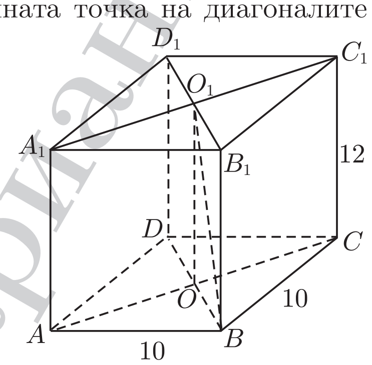
34. (Д) Да означим $\alpha = \sphericalangle A$, тогава $\sphericalangle C = 3\alpha$. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, следователно $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$. Оттук $\sphericalangle B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ и $\alpha + 3\alpha = 180^\circ$. Намираме $\alpha = 45^\circ$, $\sphericalangle A = 45^\circ$ и $\sphericalangle C = 135^\circ$.

35. (Б) Ако $BC = a$, то $AC = a + 1$ и $AB = a + 2$. Понеже $\sphericalangle B$ лежи срещу средната по дължина страна, то $\sphericalangle B$ е остър и $\cos\beta = \sqrt{1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$. От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ имаме $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB\cos\beta$, т.е. $(a+1)^2 = a^2 + (a+2)^2 - 2a(a+2)\dfrac{3}{5}$. За a получаваме $a^2 + 2a - 15 = 0$ с единствен положителен корен $a = 3$.

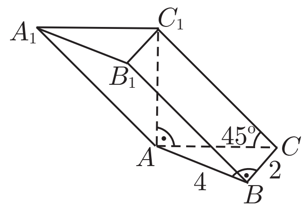


36. **(В)** От условията $AC+BD=23$ и $AC-BD=7$ намираме дължините на диагоналите. Например събирайки почленно двете равенства получаваме $2AC=30$, т.е. $AC=15$, а след това и $BD=23-15=8$. Лицето S на четириъгълника $ABCD$ намираме по формулата $S=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\sin\varphi$, където φ е ъгълът между диагоналите AC и BD. В задачата $AC\perp BD$ и тогава $S=\dfrac{1}{2}\cdot 15\cdot 8\sin 90^\circ=60$.

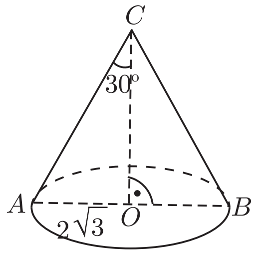
37. **(А)** Ортогоналната проекция на точката O_1 е пресечната точка на диагоналите на основата $ABCD$; означаваме я с O. Понеже диагоналите в ромба са взаимно перпендикулярни и разполовяват ъглите на ромба, $\triangle BCO$ е правоъгълен с $\sphericalangle BCO=30^\circ$. Тогава катетът $BO=\dfrac{1}{2}BC=5$. Триъгълникът BOO_1 също е правоъгълен, като $OO_1=CC_1=12$. По Питагоровата теорема намираме $O_1B=\sqrt{OO_1^2+OB^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$.



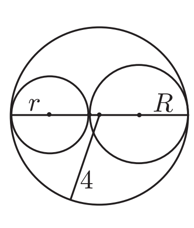
38. **(В)** Основният ръб AC е хипотенузата на $\triangle ABC$ и по Питагоровата теорема $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$. За лицето на основата имаме $S_{ABC}=\dfrac{4\cdot 2}{2}=4$. Триъгълникът ACC_1 е правоъгълен с остър ъгъл 45°. Тогава $AC_1=AC=2\sqrt{5}$. Да забележим, че C_1A е височина на дадената призма, следователно за обема V на призмата намираме $V=AC_1{\cdot}S_{ABC}=2\sqrt{5}{\cdot}4=8\sqrt{5}$.



39. **(А)** Нека $\triangle ABC$ е осно сечение на конуса и точката O е центърът на основата. Тогава $AO=2\sqrt{3}$ е радиус на основата, а CO е височината на конуса, като $\sphericalangle AOC=90^\circ$ и $\sphericalangle ACO=30^\circ$. В правоъгълния $\triangle AOC$ имаме $\dfrac{CO}{AO}=\operatorname{cotg}30^\circ$, т.е. $CO=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=6$. Следователно обемът на дадения конус е $V=\dfrac{1}{3}\,CO{\cdot}\pi\,AO^2=\dfrac{1}{3}{\cdot}6{\cdot}\pi{\cdot}(2\sqrt{3})^2=24\pi$.



40. **(Г)** Сборът от диаметрите на кълбата е равен на диаметъра на сферата, т.е. $2r+2R=8$, откъдето $R=4-r$. Тогава сборът от обемите на двете кълба изразяваме като функция на r, а именно $f(r)=\dfrac{4}{3}\,\pi r^2+\dfrac{4}{3}\,\pi(4-r)^2$, $r\in(0;4)$. От представянето $f(r)=\dfrac{8\pi}{3}\,(r^2-4r+8)=\dfrac{8\pi}{3}\,[(r-2)^2+4])$ се вижда, че $f(r)$ приема най-малка стойност за $r=2$. Тогава и $R=4-r=2$.



КЛЮЧ ЗА ВЕРНИТЕ ОТГОВОРИ

1. **В**	2. **Г**	3. **Г**	4. **Д**	5. **А**	6. **Б**	7. **Д**	8. **Б**	9. **В**	10. **Д**
11. **Г**	12. **В**	13. **Г**	14. **Б**	15. **Г**	16. **Д**	17. **А**	18. **Г**	19. **В**	20. **Б**
21. **В**	22. **Г**	23. **Д**	24. **Д**	25. **Б**	26. **В**	27. **Б**	28. **А**	29. **В**	30. **Г**
31. **Г**	32. **Б**	33. **Д**	34. **Д**	35. **Б**	36. **В**	37. **А**	38. **В**	39. **А**	40. **Г**

КАРТА ЗА САМООЦЕНКА

Въпроси	Брой на		
	верни	грешни	празни

Отбележете верните отговори с В, грешните с Х, а непопълнените с О.

Алгебра

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.1	1.5	1.6	1.7

____ ____ ____

Тригонометрия

15	16	17	18
2.1	2.2	2.2	2.1

____ ____ ____

Математически анализ

19	20	21	22	23	24	25	26
3.1	3.2	3.3	3.4	3.1	3.5	3.4	3.5

____ ____ ____

Планиметрия

27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.7	4.5	4.7

____ ____ ____

Стереометрия

37	38	39	40
5.1	5.2	5.3	5.3

____ ____ ____

ОБЩО ____ ____ ____

Резултат от теста = 4×(брой верни) − (брой грешни) = _____

Ориентирайте се в кои от темите правите повече грешки и съответно трябва да преговорите.