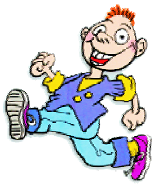
Учебен център Регалия



Учебен център • Издателство • Всичко за матурите • Е-обучение • За нас

Учебен център "Регалия" организира:

- целогодишни курсове за подготовка за зрелостни и кандидатстудентски изпити;
- целогодишни курсове за кандидатстване в езикови и профилирани гимназии по български език и математика;
- пробни изпити за кандидатстване след 7. клас;
- курсове за текуща подготовка по български език и математика за 6. клас.

На интернет страницата на Учебния център
http://www.regalia6.com
може да намерите:

тестове за външно оценяване за 4. клас

тестове за външно оценяване за 5. клас

тестове за външно оценяване за 6. клас

тестове за външно оценяване и кандидатстване след 7. клас

конкурсни изпити за кандидатстване след 7. клас

задачи от национални състезания за 7. клас

примерни тестове за ЕПИ на УНСС

тестове за зрелостни изпити

връзки към средни училища в София

връзки към висши училища в България

и още много полезна информация.

Конкурсен изпит за НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

За профил *математика* – 7 юли 2006 година

Време за работа 4 астрономически часа.

Задача 1. Дадени са изразите

$A = x^2 - 4x - 5$ и $B = \dfrac{810^{502}}{(-100)^{251}.3^{2006}}$.

а) Докажете, че $A \geq B$ за всяко x.

б) Разложете A на множители.

в) Намерете стойностите на x, за които $|A| < |35 - 7x|$.

Задача 2. В един камион има 1000 литра минерална вода в три вида бутилки: по 5, по 7 и по 10 литра.

а) Покажете, че бутилките могат да се разпределят в два магазина така, че всеки магазин да получи по 500 литра вода.

б) По колко бутилки има от всеки вид, ако общият им брой е 121, а броят на бутилките от 10 литра е най-голямото двуцифрено число, което дели числото 2006.

Задача 3. Даден е четириъгълникът $ABCD$. Диагоналите AC и BD се пресичат в точка T, а продълженията на страните AB и BD – в точка S.

а) Докажете, че ако $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA = 60^\circ$ и $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BDC$, то $\sphericalangle ATB = 60^\circ$, $AC = BD$ и $AB + CD = AD$.

б) Докажете, че ако N и M $(N \neq M)$ са средите съответно на AD и ST и $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 90^\circ$, то $NM \perp BC$.

Решения

Задача 1. а) Опростяваме израза B:

$$B = \frac{810^{502}}{(-100)^{251}.3^{2006}} = -\frac{(81.10)^{502}}{(10^2)^{251}.3^{2006}} =$$

$$= -\frac{(3^4)^{502}.10^{502}}{10^{2.251}.3^{2006}} = -\frac{3^{4.502-2006}.10^{502}}{10^{502}} = -3^2 = -9.$$

Разглеждаме разликата $A - B$:

$$A - B = \left(x^2 - 4x - 5\right) - (-9) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

Тъй като $(x-2)^2 \geq 0$ за всяко x, то $A - B \geq 0 \Leftrightarrow A \geq B$ за всяко x.

б) Имаме $A = x^2 - 4x - 5 = x^2 - 4x + 4 - 9 = (x-2)^2 - 3^2 =$

$$= [(x-2)-3]\,[(x-2)+3] = (x-5)\,(x+1).$$

в) Като използваме резултата от б), имаме

$$|A| < |35 - 7x| \Leftrightarrow |(x-5)\,(x+1)| < 7\,|x-5|.$$

Очевидно числото 5 не е решение на неравенството.

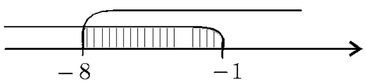
За всяко x, $x \neq 5$ е изпълнено $|x-5| > 0$. Тогава

$$|(x-5)\,(x+1)| < 7\,|x-5| \Leftrightarrow |x+1| < 7$$

I случай: Нека $x < -1$. Тогава

$$|x+1| < 7 \Leftrightarrow -(x+1) < 7 \Leftrightarrow -x < 8 \Leftrightarrow x > -8.$$

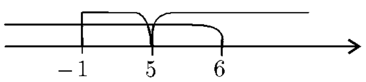
В този случай решенията на неравенството са всички числа x, за които $-8 < x < -1$.



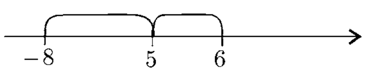
II случай: Нека $x \geq -1$, $x \neq 5$. Тогава

$$|x+1| < 7 \Leftrightarrow (x+1) < 7 \Leftrightarrow x < 6.$$

Така в този случай решенията на неравенството са всички числа от множеството $x \in (-8\,;\ 5) \cup (5\,;\ 6)$.



Окончателно, като обединим двата случая, получаваме, че решение на даденото неравенства е всяко $x \in (-8\,;\ 5) \cup (5\,;\ 6)$



Задача 2. а) I случай: Нека в 5-литровите и 10-литровите бутилки има поне 500 литра. Ясно е тогава, че в първия магазин могат да се оставят точно 500 литра, налети само в такива бутилки.

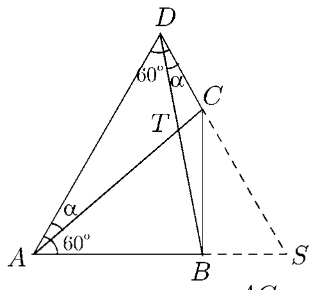
II случай: Нека в 5-литровите и 10-литровите бутилки има по-малко от 500 литра. Следователно в 7-литровите бутилки има не по-малко от 505 литра. Но 504 литра се събират в 72 бутилки, т.е. 7-литровите бутилки са най-малко 72. Тогава в първия магазин ще оставят седемдесет 7-литрови бутилки и една 10-литрова бутилка $(7.70 + 10 = 500)$.

б) Тъй като $2006 = 2.1003 = 2.17.59$, то двуцифрените числа, които делят 2006 са 17, 34, 59. Това означава, че 10-литровите бутилки са 59, 5 и 7-литровите са общо $121 - 59 = 62$ и в тях има общо $1000 - 590 = 410$ литра. Нека броят на 5-литровите бутилки е x. Тогава броят на 7-литровите е $62 - x$. Оттук следва, че

$$5x + 7\,(62 - x) = 410 \Leftrightarrow -2x = 410 - 434 \Leftrightarrow x = 12.$$

Така получихме, че броят на 5-литровите бутилки е 12, а на 7-литровите е 50.

Задача 3. а) Нека $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BDC = \alpha$. Ъгъл ATB е външен ъгъл за триъгълник ATD и следователно $\sphericalangle ATB = \sphericalangle TAD + \sphericalangle ADT = \alpha + (60^\circ - \alpha) = 60^\circ$.



Тъй като триъгълникът ASD е равнобедрен с ъгъл 60°, то той е равностранен. Да разгледаме триъгълниците ACD и DBS:

1) $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BDS = \alpha$;

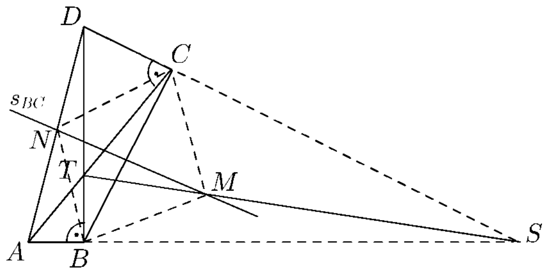
2) $\sphericalangle CDA = \sphericalangle BSD = 60^\circ$;

3) $AD = SD$.

Тогава $\triangle ACD \cong \triangle DBS$ по втори признак за еднаквост на триъгълници $\Rightarrow AC = BD$.

От $\triangle ACD \cong \triangle DBS$ следва, че $\triangle CD = \triangle BS$ (като съответни елементи). Тъй като $\triangle ADS$ е равностранен, то $AD = AS = AB + BS = AB + CD$.

б) Разглеждаме правоъгълните триъгълници ABD и ACD. Тъй като N е среда на хипотенузата AD, то $BN = \dfrac{1}{2}AD = CN$ (медиана към хипотенузата в правоъгълен триъгълник).



Аналогично за правоъгълните триъгълници BST и CST имаме

$$BM = \frac{1}{2}ST = CM.$$

С това показахме, че точките N и M са две точки от симетралата BC. Това означава, че $NM \perp BC$.

Указание за оценяване на писмената работа

Задача 1.	а)	2 точки	б)	1 точка	в)	2 точки
Задача 2.	а)	4 точки	б)	3 точки		
Задача 3.	а)	3 точки	б)	5 точки		

1. При други верни решения всяко от подусловията на задачите получава общия брой на точките, указани при тези решения:

Общо 23 точки.

2. За всяка техническа грешка се отнемат 0,25 т., а при логическа – не по-малко 0,5 т. (дори при верни отговори).
3. Крайната оценка се получава по-формулата

$$\text{Оценка} = 0,05\,(3x + 51),$$

където x е броят на получените точки

Всички работи, получили по-малко от 3 точки, получават оценка Слаб 2.