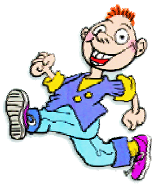
Учебен център Регалия



Учебен център • Издателство • Всичко за матурите • Е-обучение • За нас

Учебен център "Регалия" организира:

- целогодишни курсове за подготовка за зрелостни и кандидатстудентски изпити;
- целогодишни курсове за кандидатстване в езикови и профилирани гимназии по български език и математика;
- пробни изпити за кандидатстване след 7. клас;
- курсове за текуща подготовка по български език и математика за 6. клас.

На интернет страницата на Учебния център
http://www.regalia6.com
може да намерите:

тестове за външно оценяване за 4. клас

тестове за външно оценяване за 5. клас

тестове за външно оценяване за 6. клас

тестове за външно оценяване и кандидатстване след 7. клас

конкурсни изпити за кандидатстване след 7. клас

задачи от национални състезания за 7. клас

примерни тестове за ЕПИ на УНСС

тестове за зрелостни изпити

връзки към средни училища в София

връзки към висши училища в България

и още много полезна информация.

ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

7 юли 2007 год.

Задача 1. Дадени са изразите

$A=(x+4)^3-4(x+4)$ $B=-(x+6)$ и $C=Ax+16$.

а) Приведете A в нормален вид.

б) Представете A като произведение от три множителя.

в) Намерете всички стойности на x, за които $A = B$.

г) Докажете, че ако x е цяло число, то стойността на израза C е точен квадрат на цяло число. **10 точки**

Решение. а) Разкриваме скобите и извършваме приведение:

$A=(x+4)^3-4(x+4)=x^3+3x^2.4+3x.4^2+4^3-4x-16=$

$=x^3+12x^2+44x+48$. **2 т.**

б) Извършваме преобразуванията:

$A=(x+4)^3-4(x+4)=(x+4)\left((x+4)^2-4\right)=$

$=(x+4)(x+4-2)(x+4+2)=(x+4)(x+2)(x+6)$. **2 т.**

в) Имаме

$A=B\Leftrightarrow(x+4)(x+2)(x+6)=-(x+6)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (x+4)(x+2)(x+6)+(x+6)=0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+6)\left((x^2+6x+8)+1\right)=0\Leftrightarrow(x+6)\left(x^2+6x+9\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+6)(x+3)^2=0$.

Следователно $A=B$ при $x_1=-6$ и $x_2=-3$. **2 т.**

г) $C=Ax+16=\left(x^3+12x^2+44x+48\right)x+16=$

$=x^4+12x^3+44x^2+48x+16=$

$=\left(x^4+12x^3+36x^2\right)+8\left(x^2+6x+2\right)=$

$=\left(x^2+6x\right)^2+2.4.\left(x^2+6x\right)+16=\left(x^2+6x+4\right)^2$. **3 т.**

Тъй като x е цяло число, то и числото x^2+6x+4 е цяло. Следователно C е квадрат на цяло число. **1 т.**

Задача 2. Броят на сватбите на 7 юли 2007 година в една държава е със $71\frac{3}{7}$ % по-малък от броя на сватбите в друга държава.

а) Намерете колко сватби има във всяка от тези държави в този ден, ако се знае, че общият им брой е 2007.

б) Намерете броя на гостите на една от сватбите, ако се знае, че той е най-голямото трицифрено число, което е 34 пъти по-голямо от сбора на цифрите си.

9 точки

Решение. а) Нека броят на сватбите в първата държава е x. Тогава във втората държава ще има

$x-71\frac{3}{7}.\frac{x}{100}=x-\frac{5x}{7}=\frac{2x}{7}$ сватби. **2 т.**

От условието на задачата следва, че $x+\frac{2x}{7}=2007$. **1 т.**

Оттук имаме

$x+\frac{2x}{7}=2007\ \Leftrightarrow\ \frac{9x}{7}=2007\ \Leftrightarrow\ x=\frac{7.2007}{9}\ \Leftrightarrow\ x=1561.$

В първата държава има 1561 сватби, а във втората – $\frac{2.1561}{7}=2.223=446$ сватби.

1 т.

б) Нека числото е $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Съгласно условието

$$100x + 10y + z = 34\left(x + y + z\right) \text{ или } 66x - 24y - 33z = 0 \ \Leftrightarrow \ 11(2x - z) = 8y .$$

От това равенство следва, че y се дели на 11. Но y е цяло число между 0 и 9. Следователно $y = 0$ и $2x - z = 0$.

Така получихме, че възможните числа са 102, 204, 306 и 408. Броят на гостите е бил 408. **5 т.**

Задача 3. Външните ъгли при върховете A, B и C на $\triangle ABC$ се отнасят съответно така, както 26:25:21. Ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ и симетралата на страната AB се пресичат в точка O, а правата BO и страната AC се пресичат в точка M.

а) Изчислете мерките на вътрешните ъгли на $\triangle ABC$.

б) Докажете, че дължината на отсечката MB е равна на дължината на точно една от страните на триъгълника.

в) Намерете дължината на страната BC, ако разстоянието от точка M до нея е $7\frac{1}{4}$ cm.

г) Да се докаже, че $MA + MO < AB$. **9 точки**

Решение. а) Нека α, β и γ са вътрешните ъгли, а α', β' и γ' са външните ъгли съответно при върховете A, B и C. Съгласно условието $\alpha' = 26k$, $\beta' = 25k$ и $\gamma' = 21k$. Оттук получаваме

$$180^\circ = \alpha + \beta + \gamma = \left(180^\circ - \alpha'\right) + \left(180^\circ - \beta'\right) + \left(180^\circ - \gamma'\right) =$$

$$= 540^\circ - \left(26k + 25k + 21k\right) = 540^\circ - 72k \ \text{ или } \ 72k = 360^\circ \ \Leftrightarrow \ k = 5^\circ .$$

Следователно мерките на вътрешните ъгли са съответно

$\alpha = 180^\circ - 26.5^\circ = 50^\circ$,

$\beta = 180^\circ - 25.5^\circ = 55^\circ$,

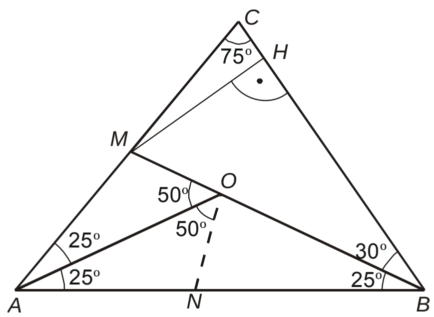
$\gamma = 180^\circ - 21.5^\circ = 75^\circ$. **2 т.**

б) Тъй като AO е ъглополовяща, то $\sphericalangle OAB = \frac{1}{2}\sphericalangle CAB = 25^\circ$.

Триъгълникът ABO е равнобедрен (O е точка от симетралата на AB). Следователно $\sphericalangle ABO = 25^\circ$.

Оттук намираме $\sphericalangle CBM = 55^\circ - 25^\circ = 30^\circ$ и

$\sphericalangle CMB = 180^\circ - \left(75^\circ + 30^\circ\right) = 75^\circ = \gamma$.



Следователно $\triangle BMC$ е равнобедрен, като $BM = BC$. Тъй като трите ъгъла на триъгълника ABC имат различни мерки, то и трите страни са различни. Следователно BM е равна на **точно една** страна на триъгълника. **2 т.**

в) Нека MH е височина в $\triangle BCM$ към страната BC. В правоъгълния $\triangle BHM$ имаме $\sphericalangle HBM = 30^\circ$. Следователно

$$BC = BM = 2MH = 2.7\frac{1}{4} = 14{,}5 \text{ cm}.$$ **1 т.**

г) Построяваме точката N върху AB, така че $AN = AM$. Тогава $\triangle AOM \simeq \triangle AON$ ($\sphericalangle MAO = \sphericalangle OAN = 25^\circ$, $AN = AM$, OA – обща). Оттук $\sphericalangle AOM = \sphericalangle AON$ и $MO = ON$.

Имаме $\sphericalangle AOM = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OBA = 50^0$ (външен ъгъл). Тогава $\sphericalangle BON = 180^0 - 100^0 = 80^0$. Тъй като $\sphericalangle BON > \sphericalangle NBO$, то $NB > ON$. Следователно

$MA + MO = AN + ON < AN + NB = AB$. **4 т.**

Оценката се изчислява по формулата:

$$\text{Оценка} = \frac{3 \text{ х общ брой точки} + 66}{25}$$