Тест № 12

Първи модул

1. **(А)** От условието $x+2=y \Rightarrow y-2=x$ и $x-y=-2$. Тогава $(y-2)^2-|x-y|-x^2 = x^2-|-2|-x^2=-|-2|=-2$.

2. **(Б)** Използваме формулата $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

3. **(Г)** $-1+2x-x^2=-(1-2x+x^2)=-(1-x)^2$.

4. **(Б)** $0x<0 \iff 0<0 \Rightarrow$ няма решение. Неравенството от А) $0x \geq 0 \iff 0 \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}$ е решение; от В) $\dfrac{1}{2}x^2 > -\dfrac{1}{2}|.2>0 \iff x^2>-1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}$ и Г) $-\dfrac{2}{3}x > -2 \iff x<3$, т.е. има решение.

5. **(А)** От $a>-2|.2>0 \Rightarrow 2a>-4$, но $-4>-5 \Rightarrow 2a>-5$. За Б) от $a<b|.(-1)<0 \Rightarrow -a>-b|+(-1) \Rightarrow -1-a>-1-b$, т.е. твърдението не е вярно. За В) от $0,01<0,02|.a>0 \Rightarrow 0,01a<0,02a$, т.е. не е вярно и за Г) $-3<3|.$ $a<0 \Rightarrow -3a>3a \Rightarrow$ твърдението не е вярно.

6. **(В)** $(x-7)^2+3=(x-2)(x+2) \iff x^2-14x+49+3=x^2-2^2 \iff$
$-14x=-52-4 \iff -14x=-56 \iff x=4$

7. **(Г)** $\sphericalangle AOE = \sphericalangle BOC$, т.е. $x=\alpha$ (противоположни ъгли при $AB \cap EC$). $\sphericalangle AOB = 180^\circ$ (изправен ъгъл) и $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD + \sphericalangle DOC + \sphericalangle COB \Rightarrow$
$180^\circ = 42^\circ + 5\alpha + \alpha \Rightarrow 180^\circ - 42^\circ = 6\alpha \Rightarrow \alpha = 138^\circ : 6 = 23^\circ \Rightarrow x = 23^\circ$.

8. **(Б)** От условието $AB=DC$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$ и $AB \neq BC$ следва:
А) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (I признак);
В) $AD=BC$ (съответни страни в еднакви триъгълници);
Г) $BO=OD$ като съответни страни в $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ (II признак).
Остава Б) да е грешно твърдение. Ако допуснем, че $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB$ и от условието $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BAC \Rightarrow \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB$ и по теорема получаваме, че $AB=BC$, което не е изпълнено. Следователно $\sphericalangle ACD \neq \sphericalangle ACB$.

9. **(Б)** $\sphericalangle AMB = \varphi + \gamma$ (външен ъгъл за $\triangle BCM$) и $\sphericalangle CMB = \alpha + \delta$ (външен ъгъл за $\triangle AMB$), а по условие $\alpha+\delta=\varphi+\gamma \Rightarrow \sphericalangle AMB = \sphericalangle CMB$, но те са съседни ъгли и по теорема сборът им е $180^\circ \Rightarrow \sphericalangle AMB = \sphericalangle CMB = 90^\circ \Rightarrow BM \perp AC$, т.е. BM е височина. По условие BM е медиана в $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ е равнобедрен.

10. **(В)** По определение – правоъгълник с равни съседни страни е квадрат, откъдето следва, че всеки квадрат е правоъгълник (I). Еквивалентното му твърдение е IV – не съществува квадрат, който да не е правоъгълник.

11. **(В)** А) $|x^2-3|+1=0 \iff |x^2-3|=-1$, което няма решение, защото $|x^2-3| \geq 0$ за $\forall x$, а $(-1)<0$.
Б) $(x+1)^2=x(x+2) \iff x^2+2x+1=x^2+2x \iff 1=0 \Rightarrow$ няма решение.
В) $x(x+1)=x(x-1) \iff x^2+x=x^2-x \iff 2x=0 \iff x=0 \Rightarrow$ има само един корен.
Г) Можем да проверим: $|x+2x-4-3x|=4 \iff |-4|=4 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}$ е решение, т.е. това уравнение има безброй много корени.

12. (В) $4a^2 - 4b^2 - 4a + 1 = (4a^2 - 4a + 1) - 4b^2 = (2a-1)^2 - (2b)^2 =$
$[(2a-1)+2b].[(2a-1)-2b] = (2a-1+2b)(2a-1-2b)$.

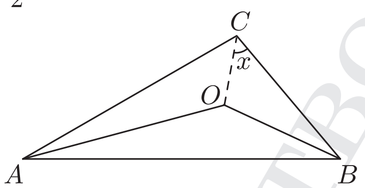
13. (А) $(ax+4)^2 = 4x^2 - 16x + c$ е тъждество по условие. $a^2x^2 + 8ax + 16 =$
$4x^2 - 16x + c \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^2 = 4 \\ 8a = -16 \\ 16 = c \end{array} \right.$, т.е. коефициентите пред съответните степени на x са равни. Получаваме, че $c = 16$, $a = -2$ и $a - c = -2 - 16 = -18$.

14. (Г) $3|1-2x| = 15| : 3 \Rightarrow |1-2x| = 5 \iff 2\left|x - \dfrac{1}{2}\right| = 5$. Даденото уравнение има 2 решения, а уравнението $|x-3| = 0$ от А) има 1 решение, както и това от Б) . Уравнението $|2x-1| = -5$ няма решение, тъй като $|2x-1| \geq 0$ за $\forall x$, а $-5 < 0$.

15. (А) $\dfrac{3x-1}{6} \geq x^2 - \dfrac{x(2x-1)}{2}\,|.6 > 0 \iff 3x-1 \geq 6x^2 - 3x(2x-1) \iff 3x-1 \geq 6x^2 - 6x^2 + 3x \iff -1 \geq 0 \Rightarrow x \in \varnothing$.

16. (В) $b^2 - c^2 + ac - ab = 0 \Rightarrow (b-c)(b+c) - a(b-c) = 0 \Rightarrow (b-c)(b+c-a) = 0$. a, b и c са дължините на страните на триъгълник и по теорема $b + c > a \Rightarrow b + c - a > 0 \Rightarrow b - c = 0 \Rightarrow b = c$ (1). За ъглите в триъгълника $2\alpha = \beta + \gamma$, а по теорема $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ (2). От (1) и (2) $\Rightarrow$ триъгълникът е равнобедрен с ъгъл 60°, следователно е равностранен.

17. (А) Ако $\sphericalangle C = \gamma$, по основна задача $\Rightarrow \sphericalangle AOB = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$, т.е. $140^\circ = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2} \iff \dfrac{\gamma}{2} = 50^\circ \Rightarrow \gamma = 100^\circ = \sphericalangle ACB$. За по-бързо решаване е добре да се знае свойството (задачата), че трите ъглополовящи във всеки триъгълник се пресичат в една точка. Следователно CO е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB = 100^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$.



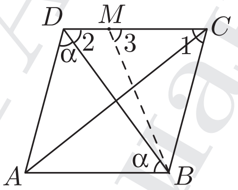
18. (В) $ABCD$ е квадрат, следователно $AD = DC$ и $\sphericalangle ADC = \sphericalangle DCB = 90^\circ$.
$\triangle ADM \cong \triangle DCF$ по I признак, следователно отговор А) не е верен.
От еднаквите триъгълници следва, че $\sphericalangle DAM = \sphericalangle CDF = \alpha$ (съответни ъгли).
Ако $\sphericalangle DFC = \beta$, от $\triangle DCF \Rightarrow DC > CF$ и по теорема $\Rightarrow \beta > \alpha$, т.е. отговор Б) също не е верен ($\alpha = \beta$).
От еднаквите триъгълници следва, че $DF = AM$ (съответни страни), следователно отговор Г) не е верен.
Остава В) да бъде верен отговор.
Забележка: $\sphericalangle ADO = 90^\circ - \sphericalangle CDF = 90^\circ - \alpha$ и от $\triangle ADO$:
$\sphericalangle ADO + \sphericalangle DAO + \sphericalangle AOD = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ - \alpha + \alpha + \sphericalangle AOD = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOD = 90^\circ \Rightarrow$ В) е верен отговор.

19. (Г) За $\triangle MBC$ е изпълнено $MB = 2\,\text{cm}$ – катет, $MC = 4\,\text{cm}$ – хипотенуза, следователно $MB = \dfrac{1}{2}MC$, откъдето по теорема $\sphericalangle MCB = 30^\circ$ (свойство на катет, равен на половината от хипотенузата). $\sphericalangle ACB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ и от $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$, $\sphericalangle ACB = 60^\circ$) $\Rightarrow$ по теорема за сбор на ъглите в триъгълник, че $\sphericalangle A = 30^\circ$. От $\sphericalangle A = \sphericalangle ACM = 30^\circ \Rightarrow AM = MC = 4\,\text{cm}$. Тогава

$AB = AM + MB = 4 + 2 = 6\,\mathrm{cm}$.

20. **(В)** Нека $a = AB \Rightarrow P_{ABCD} = 2AD + 2AB = 2.5 + 2a \Rightarrow 2(5 + a) = 3,4\,\mathrm{dm}$.
$1\,\mathrm{dm} = 10\,\mathrm{cm} \Rightarrow 3,4\,\mathrm{dm} = 34\,\mathrm{cm}$.
$2(5 + a) = 34\,\mathrm{cm} \Rightarrow 5 + a = 17 \Rightarrow a = 12\,\mathrm{cm}$.
AM – ъглополовяща на $\sphericalangle BAD \Rightarrow \sphericalangle BAM = \sphericalangle MAD = \alpha$.
Аналогично $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MBC = \beta$. Но от определението за успоредник следва, че $AD \parallel BC$ и $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180^\circ$ (прилежащи ъгли) $\Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$.
От $\triangle ABM$ по теоремата за сбор на ъглите в триъгълник следва, че $\sphericalangle AMB = 90^\circ \Rightarrow MF = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}.12\,\mathrm{cm} = 6\,\mathrm{cm} = 0,6\,\mathrm{dm}$ (свойство на медиана към хипотенуза в правоъгълен триъгълник).

21. **(В)** $ABCD$ е ромб $\Rightarrow AB = AD \Rightarrow$ по теорема, че $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB = \alpha$ (ъгли при основата на равнобедрен триъгълник). От теоремата за сбор на ъглите в $\triangle ABD \Rightarrow \sphericalangle BAD = 180^\circ - 2\alpha$. По условие $AB > BD \Rightarrow$

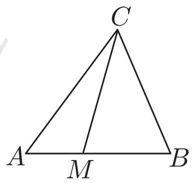


$\sphericalangle ADB > \sphericalangle BAD \Rightarrow \alpha > 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \alpha > 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAD < 60^\circ$, т.е А) е вярно твърдение.
От свойството на ромба, че диагоналите му са ъглополовящи на ъглите му, се получава, че $\sphericalangle ABC = 2\alpha > 120^\circ \Rightarrow$ и Б) е вярно твърдение. За В) трябва да сравним BM и BC, т.е. ъглите срещу тях. От $\sphericalangle 2 = \alpha > 60^\circ$ и $\sphericalangle 1 = \sphericalangle BAD < 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle 2 > \sphericalangle 1$. Но $\sphericalangle 3 > \sphericalangle 2$ ($\sphericalangle 3$ е външен за $\triangle BDM$) $\Rightarrow \sphericalangle 3 > \sphericalangle 1 \Rightarrow BC > BM$, т.е. неравенството във В) не е вярно.

22. **(А)** От

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AMC \Rightarrow CM < AM + AC\\ \triangle BMC \Rightarrow CM < BM + BC\end{array}\right| +$$

Получава се, че $2CM < AM + BM + AC + BC$, т.е. $2CM < AB + AC + BC$. От това, че неравенството в А) е вярно $\Rightarrow$ че това в Б) не е вярно.



За В) и Г) разглеждаме $\left.\begin{array}{l}\triangle AMC \Rightarrow AC < AM + MC\\ \triangle BMC \Rightarrow BC < BM + MC\end{array}\right| +$

Получава се, че $AC+BC < (AM+BM)+2MC$, т.е. $AC+BC < AB+2CM \iff 2CM > AC + BC - AB \Rightarrow$ В) и Г) не са верни твърдения.

23. **(Г)** От условието, че AC е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$ следва, че $AD = DC$, но $ABCD$ е равнобедрен трапец с основи AB и $CD \Rightarrow AD = BC$. Нека $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = 2\alpha$ (ъгли при основата на равнобедрен трапец).

1 случай: $AC = DC = AD \Rightarrow \triangle ADC$ е равностранен и $\alpha = 60^\circ$. От $AC = AD = BC$ и $\alpha = \sphericalangle BAC = 60^\circ \Rightarrow$ и $\triangle ABC$ е равностранен, т.е. $AB = AC = DC$ и от $AB \underset{=}{\overset{\parallel}{}} DC \Rightarrow ABCD$ е успоредник. Този случай е невъзможен.

2 случай: Ако $AC = AB \Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 2\alpha$, $\sphericalangle BAC = \alpha$ и за $\triangle ABC$: $5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ \Rightarrow$ верният отговор е (Г).

24. **(Б)** $S = 420\,\mathrm{m}$, $V_1 = 7\,\mathrm{m/s}$ – скоростта на Кирил $\Rightarrow t_1 = \dfrac{S}{V_1} = \dfrac{420}{7}$, $t_1 = 60\,\mathrm{s}$. $V_2 = 4\,\mathrm{m/s}$ – скоростта на Милен. Тъй като Милен имал преднина $a\,\mathrm{m}$, следва, че той е изминал $S_2 = 420 - a\,\mathrm{m}$ за същото време, за което Кирил е изминал $S_1 = 420\,\mathrm{m}$ (те са пристигнали едновременно). Следователно $t_2 = \dfrac{S_2}{V_2} = \dfrac{420-a}{4}$.

$t_1 = t_2 \Rightarrow 60 = \dfrac{420-a}{4} \iff 240 = 420 - a \iff a = 180.$

25. **(А)**

	бр. книги в началото	бр. свалени книги	бр. останали книги
I рафт	$3x$	13	$3x - 13$
II рафт	x	2	$x - 2$

Нека x на брой книги е имало на втория рафт, x – естествено число,

$$\left|\begin{array}{l} x - 2 > 0 \ (1) \\ 3x - 13 > 0 \ (2) \end{array}\right..$$

(останали книги на I рафт) = 2.(останали книги на II рафт)

$3x - 13 = 2(x-2) \Rightarrow 3x - 13 = 2x - 4 \Rightarrow 3x - 2x = 13 - 4 \Rightarrow x = 9.$

Числото 9 изпълнява условията (1) и (2). Първоначално на първия рафт е имало $3x = 3.9 = 27$ книги.

Втори модул

26. **(50)** По условие производителността на първия багер е $P_1 = 12$ m/h, а $P_2 = P_1 - 16\dfrac{2}{3}\%$ от $P_1 = 12 - \dfrac{50}{3}\%$ от $12 = 12 - \dfrac{50}{3}.\dfrac{1}{100}.12 = 12 - 2 = 10$ m/h. Нека x m е дълъг каналът, $x > 0$:

	A (m)	P (m/h)	$t = \dfrac{A}{P}$ (h)
I багер	$\dfrac{x}{2} + 5$	12	$\dfrac{\frac{x}{2}+5}{12} = \dfrac{x+10}{24}$
II багер	$\dfrac{x}{2}$	10	$\dfrac{\frac{x}{2}}{12} = \dfrac{x}{20}$

$t_{\mathrm{II}} \le t_{\mathrm{I}}$; $\dfrac{x}{20} \le \dfrac{x+10}{24} |.120 > 0$, $6x \le 5(x+10), x \le 50$. Следователно каналът може да е дълъг най-много 50 m.

27. $\left(\mathbf{\dfrac{5}{8}}\right)$ $2x^2 = x \iff 2x^2 - x = 0 \iff (2x-1)x = 0 \iff 2x - 1 = 0$, или $x = 0$.

Първото уравнение има корени $x_1 = \dfrac{1}{2}$ и $x_2 = 0$.

От определението за модул на рационално число $\Rightarrow |a| = |-a|$ и тогава за уравнението $\dfrac{|x-1|}{3} + \dfrac{|1-x|}{2} = \dfrac{5}{12}$, като направим заместване $|x-1| = |1-x| = t \ge 0$, получаваме $\dfrac{t}{3} + \dfrac{t}{2} = \dfrac{5}{12} |.12 \iff 4t + 6t = 5 \iff t = \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ $|x-1| = \dfrac{1}{2} \iff x - 1 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \dfrac{1}{2}$ или $x - 1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_4 = 1\dfrac{1}{2}$. Получаваме, че $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$ и $x_4 = 1\dfrac{1}{2}$ са корените на двете уравнения и са неотрицателни числа. Средното им аритметично число е $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \dfrac{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{4} = \dfrac{\frac{5}{2}}{4} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{8}$.

28. **(15)** $ABCD$ – правоъгълник, следователно диагоналите му AC и BD са равни и пресечната им точка O е общата им среда, т.е. $OB = OC$. От $C \in s_{OB}$ следва по теорема, че $OC = BC \Rightarrow OC = OB = BC$, т.е. $\triangle OBC$ е равностранен и от $s_{OB} \perp OB \Rightarrow \sphericalangle BCM = 30^\circ$. За $\triangle MBC$ ($\sphericalangle MBC = 90^\circ$ и $\sphericalangle BCM = 30^\circ$) $\Rightarrow MB = \dfrac{1}{2}MC = 5\,\mathrm{dm}$ (свойство на катет, лежащ срещу ъгъл от 30°) $\Rightarrow MC = 10\,\mathrm{dm}$. От $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle OCB = 60^\circ$) $\Rightarrow \sphericalangle BAC = 30^\circ$, но $\sphericalangle OCB = \sphericalangle BCM = 30^\circ$ (в равностранен триъгълник ъглополовящата съвпада с височината). Оттук $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA = 30^\circ \Rightarrow AM = MC = 10\,\mathrm{dm}$, $\Rightarrow AB = AM + MB = 10 + 5 = 15\,\mathrm{dm}$.

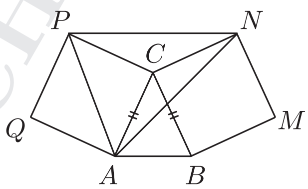
29. $(x+3)^2 - 25 \geq (x-4)(x+4) + 6x \iff x^2 + 6x + 9 - 25 \geq x^2 - 4^2 + 6x \iff -16 \geq -16 \Rightarrow \forall x$ е решение.
$b^2 + b(2-x) + 1 \leq x \iff b^2 + 2b - bx + 1 \leq x \iff (b+1)x \geq b^2 + 2b + 1 \iff (b+1)x \geq (b+1)^2$.

I. Ако $b + 1 > 0$, т.е. $b > -1 \Rightarrow x \geq \dfrac{(b+1)^2}{b+1}$, т.е. $x \geq b + 1$.

II. Ако $b + 1 < 0$, т.е. $b < -1 \Rightarrow x \leq \dfrac{(b+1)^2}{b+1}$, т.е. $x \leq b + 1$.

III. Ако $b + 1 = 0$, т.е. $b = -1 \Rightarrow 0x \geq 0 \Rightarrow \forall x$ е решение.
Следователно двете неравенства са равносилни при $b = -1$, тъй като имат за решение $\forall x \in \mathbb{Q}$.

30. По условие $\triangle ABC$ е остроъгълен и равнобедрен ($AC = BC$), а един от ъглите му е 45°. Ако $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45^\circ \Rightarrow \sphericalangle ACB = 90^\circ$, т.е. $\triangle ABC$ е правоъгълен. Следователно $\sphericalangle ACB = 45^\circ$.



От $BCNM$ и $ACPQ$ – квадрати $\Rightarrow \sphericalangle BCN = \sphericalangle ACP = 90^\circ$.
$\sphericalangle PCN = 360^\circ - \sphericalangle ACP - \sphericalangle ACB - \sphericalangle BCN = 360^\circ - 90^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 135^\circ$.
$\sphericalangle ACN = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCN = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ \Rightarrow \sphericalangle PCN = \sphericalangle ACN = 135^\circ$.
$AC = BC$ по условие, $AC = CP$ ($ACPQ$ – квадрат), $BC = CN$ ($BCNM$ – квадрат) $\Rightarrow \triangle ACN \cong \triangle PCN$ (I признак) $\Rightarrow PN = AN$ (съответни страни в еднакви триъгълници $\Rightarrow N \in s_{AP}$). От $CP = AC \Rightarrow C \in s_{AP} \Rightarrow CN \equiv s_{AP}$. От $PC = CN$ и $\sphericalangle PCN = 135^\circ \Rightarrow \sphericalangle CPN = \sphericalangle CNP = \dfrac{45^\circ}{2}$. Аналогично $\sphericalangle CAN = \sphericalangle CNA = \dfrac{45^\circ}{2} \Rightarrow \sphericalangle ANP = 45^\circ$, а $\sphericalangle APN = \sphericalangle PAN = \dfrac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \dfrac{135}{2} = 67^\circ 30'$.